J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
13 (1978) 373-383

# ESPACES À COURBURE QUASI-CONSTANTE

VALENTIN BOJU & MARIANA POPESCU

## 0. Introduction

On étudie une classe des espaces de Riemann qui constituent une généralisation naturelle des espaces à courbure constante. On établit certaines propriétés des espaces $QC$ concernant leur structure, des conditions d'être irréductibles et local-symétriques. On considère des champs Jacobi le long des trajectoires d'un champ distingué $X_n$. Finalement, on remarque quelques questions relatives aux espaces de Riemann qui satisfont seulement une partie de conditions utilisées pour définir les espaces $QC$.

## 1. Espaces $QC$

Soit $(M, \langle\ \rangle)$ une variété riemannienne de dimension $n \geq 4$, $D^1(M)$ l'algèbre de Lie des champs vectoriels sur $M$, et $F(M)^0 = \{f: M \to R, f \in C^\infty\}$, où $\langle\ \rangle$ désigne le champ métrique $g$. Pour un vecteur $A$ de l'espace tangent $M_p$, $p \in M$, notons par $C(A, \theta)$ l'ensemble des facettes planes $\subset \in M_p$ qui font avec $A$ un angle égal à $\sphericalangle\,(A, \sigma) = \theta$.

Supposons maintenant qu'il existe

$$p \in M\,, \quad X \in M_p\,, \quad \text{et } \theta_0 \in (0; \tfrac{1}{2}\pi)\,, \quad \text{où } X \neq 0\,,$$

de sorte que

$$k(\sigma_1) = k(\sigma_2) \overset{\text{notation}}{=\!=\!=} E \tag{1.1}$$

pour toutes les facettes planes $\sigma_1, \sigma_2 \in C(X; \theta_0)$, où $k(\sigma)$ est la courbure plane du $\sigma$. Évidemment, on peut considérer $\|X\| = 1$.

Soit $\sigma \in C(X; \theta_0)$ et $\{Y, Z\}$ une base orthonormée du plan $\sigma$. La condition $\sigma \in C(X; \theta_0)$ est équivalente à

$$\langle X, Y\rangle^2 + \langle X, Z\rangle^2 = \cos^2\theta_0\,. \tag{1.2}$$

Soit $\{X_i\}_{i=1,\cdots,n}$ une base orthonormée de l'espace $M_p$ telle que $X_n = X$. On désigne par $W^i$ les composantes du vecteur $W \in M_p$ dans la base considérée, et par $R_{ijkl}$les composantes du tenseur de courbure dans la même base. Parce

Received November 12, 1976, and, in revised form, March 28, 1977.

que la base est orthonormée, $R_{ijji}$ représente la courbure plane de la facette $(X_i, X_j)$, $i \neq j$.

Pour $\sigma, \bar{\sigma} \in C(X; \theta_0)$ et leurs bases orthonormées $\{Y, Z\}$ et $\{\bar{Y}, \bar{Z}\}$, en tenant compte de (1.1) et (1.2), nous avons

$$Y^i Z^j Z^k Y^t R_{ijkt} = \bar{Y}^i \bar{Z}^j \bar{Z}^k \bar{Y}^t R_{ijkt} = E ,$$
$$(Y^n)^2 + (Z^n)^2 = (\bar{Y}^n)^2 + (\bar{Z}^n)^2 = \cos^2 \theta_0 ,$$

donc, pour $Y(\sin \theta_0, 0, \cdots, 0, \cos \theta_0)$, $Z(0, 1, 0, \cdots, 0)$, il en résulte

$$E = R_{1221} \sin^2 \theta_0 + R_{n22n} \cos^2 \theta_0 + (R_{122n} + R_{n221}) \sin \theta_0 \cos \theta_0 . \tag{1.3}$$

Pour $Y(\sin \theta_0, 0, \cdots, 0, -\cos \theta_0)$, $Z(0, 1, 0, \cdots, 0)$ il résulte

$$E = R_{1221} \sin^2 \theta_0 + R_{n22n} \cos^2 \theta_0 - 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 R_{122n} . \tag{1.4}$$

Les formules (1.3) et (1.4) nous donnent $R_{122n} = 0$, c'est-à-dire

$$R_{\alpha\beta\beta n} = 0 , \qquad \alpha \neq \beta ; \alpha, \beta < n . \tag{1.5}$$

Donc

$$E = R_{\beta\alpha\alpha\beta} \sin^2 \theta_0 + R_{n\beta\beta n} \cos^2 \theta_0 , \qquad \alpha \neq \beta . \tag{1.6}$$

Il résulte

$$R_{n\alpha\alpha n} = R_{n11n} \overset{\text{notation}}{=\!=\!=\!=} N , \qquad \alpha \neq n . \tag{1.7}$$

En écrivant la formule (1.6) pour les indices $\beta$, $\gamma$, nous avons

$$E = R_{\gamma\beta\beta\gamma} \sin^2 \theta_0 + R_{n\beta\beta n} \cos^2 \theta_0 . \tag{1.8}$$

Les formules (1.6) et (1.8) nous donnent

$$R_{1221} = R_{\alpha\beta\beta\alpha} \overset{\text{notation}}{=\!=\!=\!=} H , \qquad \alpha \neq \beta , \tag{1.9}$$

et

$$R_{\alpha\beta\beta\alpha} = \frac{1}{\sin^2 \theta_0} (E - N \cos^2 \theta_0) = H .$$

Si

$$Y = (A^1 \sin \theta_0, \cdots, A^{n-1} \sin \theta_0, \cos \theta_0) ,$$
$$Z = (Z^1, \cdots, Z^{n-1}, 0) ,$$

et

$$(A^1)^2 + \cdots + (A^{n-1})^2 = 1 \,,$$
$$(Z^1)^2 + \cdots + (Z^{n-1})^2 = 1 \,,$$
$$A^1Z^1 + \cdots + A^{n-1}Z^{n-1} = 0 \,,$$

nous avons

$$k(\sigma) = R_{n11n}\cos^2\theta_0 + R_{1221}\sin^2\theta_0 + S \,, \tag{1.10}$$

où $S$ est la somme des termes à trois ou quatre indices distincts.

En tenant compte de (1.8), nous obtenons

$$S = 0 \,. \tag{1.11}$$

Pour $Y(A^1\sin\theta_0, 0, A^3\sin\theta_0, 0, \cdots, 0, \cos\theta_0)$, $Z(0, 1, 0, \cdots, 0)$, la formule (1.11) nous donne

$$A^1A^3\sin^2\theta_0(R_{1223} + R_{3221}) + 2A^1R_{122n}\sin\theta_0\cos\theta_0$$
$$+ 2A^3R_{322n}\sin\theta_0\cos\theta_0 = 0 \,,$$

et, en tenant compte de (1.5), nous avons

$$R_{\alpha\beta\beta\gamma} = 0 \,, \qquad \alpha \neq \gamma. \tag{1.12}$$

Pour $Y(A^1\sin\theta_0, A^2\sin\theta_0, 0, \cdots, 0, \cos\theta_0)$, $Z(Z^1, Z^2, 0, \cdots, 0)$, en utilisant un raisonnement analogue, il résulte

$$R_{n\alpha\beta n} = 0 \,, \quad \alpha, \beta < n \;; \quad \alpha \neq \beta \;; \tag{1.13}$$

pour $Y(\sin\theta_0, 0, \cdots, 0, \cos\theta_0)$, $Z(0, Z^2, Z^3, 0, \cdots, 0)$, il résulte

$$R_{\alpha\beta\gamma n} = 0 \,, \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ distincts} \,, \quad \alpha, \beta, \gamma < n \,, \tag{1.14}$$

et pour $Y(A^1\sin\theta_0, A^2\sin\theta_0, 0, \cdots, 0, \cos\theta_0)$, $Z(0, 0, Z^3, Z^4, 0, \cdots, 0)$ il résulte

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \,, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ distincts} \,, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta < n \,. \tag{1.15}$$

En conséquence, on peut énoncer

**Théorème 1.1.** *Si toutes les facettes planes $\sigma \in C(X;\theta_0)$ ont la même courbure plane, alors toutes les facettes planes qui contiennent le vecteur $X$ ont des courbures planes égales, toutes les facettes planes orthogonales à $X$ ont des courbures planes égales et toutes les composantes du tenseur de courbure à trois et à quatre indices distincts sont nulles.*

Soit $Y(A^1\sin\theta, \cdots, A^{n-1}\sin\theta, \cos\theta)$, $Z(Z^1, \cdots, Z^{n-1}, 0)$ la base orthonormée d'une facette $\sigma \in C(X;\theta)$. Par le raisonnement utilisé pour établir la formule (1.10), nous obtenons

$$k(\theta) = R_{n11n}\cos^2\theta + R_{1221}\sin^2\theta \,. \tag{1.16}$$

Donc, dans l'hypothèse du Théorème 1.1, toutes les facettes planes $\sigma \in C(X;\theta)$ ont la même courbure plane, donnée de (1.16). Évidemment, on a l'égalité

$$k(\tfrac{1}{4}\pi - \varepsilon) + k(\tfrac{1}{4}\pi + \varepsilon) = 2k(\tfrac{1}{4}\pi) .$$

**Définition 1.1.** On dit qu'un espace de Riemann est un espace $QC$ s'il existe un champ de vecteurs $X \in D^1(M)$ de sorte que pour chaque point $p \in M$

$$X_p \neq 0 ,$$

(1.17) il existe $\theta(p) \in (0; \tfrac{1}{2}\pi)$ tel que $k(\sigma_1) = k(\sigma_2)$

pour toutes les facettes planes $\sigma_1, \sigma_2 \in C(X_p; \theta(p))$ ,

où $X_p$ est le vecteur tangent induit en $p$. L'on voit facilement que $N$ et $H$ sont des fonctions $C^\infty$ sur $M$, où $N = R_{n\alpha\alpha n}$ et $H = R_{\alpha\beta\beta\alpha}$.

Si $N = H$, nous observons que l'espace considéré est à courbure constante. En vertu de [7] et du Théorème 1.1, il en résulte qu'un espace est $QC$ si et seulement s'il est à courbure quasi-constante.

## 2. Exemples

**Exemple 2.1.** Soit $G$ un espace de Riemann à courbure constante égale à $k$. Alors l'espace $M = R \times G$ est un espace $QC$ et $N = 0$, $H = k$.

**Exemple 2.2.** Soit $M$ la hypersurface de rotation donnée par les équations:

$$\begin{aligned} x^i &= 2y^n y^i / \Delta , \qquad i = 1, \cdots, n-1 , \\ x^n &= y^n(\Delta - 2)/\Delta , \\ x^{n+1} &= f(y^n) , \end{aligned}$$

où $\Delta = (y^1)^2 + \cdots + (y^{n-1})^2 + 1$. Par un calcul direct on trouve que $M$ est un espace $QC$,

$$N = \frac{4f'f''}{y^n(1+f'^2)} , \qquad H = \frac{(f')^2}{(y^n)^2(1+f'^2)} > 0 ,$$

et $X_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+f'^2}} \dfrac{\partial}{\partial y^n}$ est un champ géodésique.

## 3. La structure d'un espace $QC$

En désignant par $R_{ijkl}$ les composantes du tenseur de courbure dans une base orthonormée $\{X_i\}_{i=1,\cdots,n}$ de champs de vecteurs (sur un voisinage de coordonnées $U$), les résultats du paragraphe 1 se maintiennent (évidemment, nous supposons que $X_n = X$) et les équations de structure de Cartan [3] deviennent

$$d\omega^\alpha = -\omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta - \omega^\alpha_n \wedge \omega^n , \tag{3.1a}$$

(3.1b) $$d\omega^n = -\omega^n_\alpha \wedge \omega^\alpha ,$$

(3.1c) $$d\omega^\alpha_\beta = -\omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta - \omega^\alpha_n \wedge \omega^n_\beta + H\omega^\alpha \wedge \omega^\beta ,$$

(3.1d) $$d\omega^\alpha_n = -\omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta_n + N\omega^\alpha \wedge \omega^n ,$$

où $\alpha, \beta, \gamma < n$ et

(3.2) $$\omega^i(X_j) = \delta^i_j , \quad \omega^i_j = \Gamma^i_{kj}\omega^k , \quad \omega^i_j = -\omega^j_i .$$

Différentions (3.1c); il vient

$$\begin{aligned}
&(\omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\delta - \omega^n_\alpha \wedge \omega^n_\delta - H\omega^\alpha \wedge \omega^\delta) \wedge \omega^\delta_\beta \\
&\quad + \omega^\alpha_\delta \wedge (\omega^\gamma_\delta \wedge \omega^\gamma_\beta + \omega^n_\delta \wedge \omega^n_\beta + H\omega^\delta \wedge \omega^\beta) \\
&\quad + (\omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_n - N\omega^\alpha \wedge \omega^n) \wedge \omega^n_\beta - \omega^n_\alpha \wedge (\omega^\beta_\gamma \wedge \omega^\gamma_n - N\omega^\beta \wedge \omega^n) \\
&\quad + dH \wedge \omega^\alpha \wedge \omega^\beta + H(-\omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma - \omega^\alpha_n \wedge \omega^n) \wedge \omega^\beta \\
&\quad - H\omega^\alpha \wedge (-\omega^\beta_\gamma \wedge \omega^\gamma - \omega^\beta_n \wedge \omega^n) = 0 ,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

(3.3) $$(N - H)(\omega^\alpha \wedge \omega^n_\beta + \omega^n_\alpha \wedge \omega^\beta) \wedge \omega^n + dH \wedge \omega^\alpha \wedge \omega^\beta = 0 ,$$

ou

(3.4) $$\begin{aligned}
&(N - H)(\Gamma^n_{\gamma\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\gamma + \Gamma^n_{\gamma\alpha}\omega^\gamma \wedge \omega^\beta) \wedge \omega^n \\
&\qquad + H_\gamma\omega^\gamma \wedge \omega^\alpha \wedge \omega^\beta + H_n\omega^n \wedge \omega^\alpha \wedge \omega^\beta = 0 ,
\end{aligned}$$

où $dH = H_i\omega^i$. Donc

(3.5) $$H_\gamma\omega^\gamma \wedge \omega^\alpha \wedge \omega^\beta = 0 .$$

La relation (3.5) implique $H_\gamma = 0$, $\gamma < n$, donc

(3.6) $$dH = H_n\omega^n .$$

Si $H$ n'a pas de points critiques, alors $X_\alpha(H) = H_\alpha = 0$ implique $\langle X_\alpha, \text{grad } H\rangle = 0$, d'où il résulte que les champs $X_1, \cdots, X_{n-1}$ sont tangents aux hypersurfaces de niveau de la fonction $H$; donc $X_n = \lambda \text{ grad } H$, où $\lambda$ est une fonction $C^\infty$ sur $U$.

En tenant compte de (3.6), la formule (3.4) devient

$$\begin{aligned}
&\{(N - H)\Gamma^n_{\gamma\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\gamma + (N - H)\Gamma^n_{\gamma\alpha}\omega^\gamma \wedge \omega^\beta \\
&\qquad + [(N - H)(\Gamma^n_{\alpha\alpha} + \Gamma^n_{\beta\beta}) + H_n]\omega^\alpha \wedge \omega^\beta\} \wedge \omega^n = 0 ,
\end{aligned}$$

d'où

$$(3.7) \qquad \Gamma^n_{\alpha\beta} = 0\,, \quad \alpha, \beta < n\,, \quad \alpha \neq \beta\,,$$

$$(3.8) \qquad H_n = (H - N)(\Gamma^n_{\alpha\alpha} + \Gamma^n_{\beta\beta})\,.$$

Si l'espace considéré n'est pas à courbure constante, alors $N \neq H$ et (3.8) implique

$$(3.9) \qquad \Gamma^n_{11} = \cdots = \Gamma^n_{n-1\,n-1} \overset{\text{notation}}{=\!=\!=} \Gamma^n\,,$$

donc

$$(3.10) \qquad H_n = 2(H - N)\Gamma^n \cdot$$

Soit $\Sigma$ une hypersurface de niveau de la fonction $H$ et $L$ l'opérateur de Weingarten associé. Alors

$$LX_\alpha = \nabla_{X_\alpha} X_n = \Gamma^\beta_{\alpha n} X_\beta = -\Gamma^n X_\alpha\,,$$

c'est-à-dire

$$(3.11) \qquad LX_\alpha = -\Gamma^n X_\alpha\,,$$

donc $\Sigma$ est une hypersurface ombilicale dont la courbure principale est la fonction $(-\Gamma^n)$ .

Si $R_2$ est le tenseur de courbure de la hypersurface $\Sigma$ et $\{X, Y\}$ est une base orthonormée d'une facette plane tangente à $\Sigma$, nous avons

$$\langle R_2(X, Y)Y; X\rangle = \langle R(X, Y)Y; X\rangle + \langle X; LX\rangle\langle Y; LY\rangle - (\langle X; LY\rangle)^2\,,$$

donc

$$(3.12) \qquad \langle R_2(X, Y)Y; X\rangle = H + (\Gamma^n)^2\,.$$

En vertu du théorème de Schur, on peut énoncer

**Théorème 3.1.** *Les hypersurfaces de niveau de la fonction $H$ sont ombilicales; elles sont des hypersurfaces intégrales du système de champs $\{X_1, \cdots, X_{n-1}\}$. Ces hypersurfaces sont des espaces de Riemann à courbure constante égale à*

$$H + (\Gamma^n)^2.$$

Parce que la fonction $H + (\Gamma^n)^2$ est constante sur les hypersurfaces de niveau de $H$, il en résulte que les fonctions $\Gamma^n$ et $H$ ont les mêmes hypersurfaces de niveau.

Si $H$ est une fonction constante, alors $H_n = 0$ et la formule (3.10) nous donne $\Gamma^n = 0$. Donc

$$(3.13) \qquad \nabla_{X_\alpha} X_\beta = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma\,, \qquad \alpha, \beta, \gamma < n\,.$$

Il en résulte que si $H$ est constante, alors les hypersurfaces intégales du système des champs $\{X_1, \cdots, X_{n-1}\}$ sont des sous-variétés totalement géodésiques à courbure constante, égale à $H$.

Remarquons le fait que le système de champs $\{X_1, \cdots, X_{n-1}\}$ est compléte-ment intégrable parce que

$$[X_\alpha, X_\beta] = (\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha})X_\gamma .$$

Différentions (3.1d), il vient

$$dN \wedge \omega^\alpha \wedge \omega^n + (N - H)\omega^\alpha \wedge \omega^n_\beta \wedge \omega^n_\beta = 0 , \tag{3.14}$$

d'où, en écrivant $dN = N_i\omega^i$, nous avons

$$N_\alpha = (H - N)\Gamma^n_{n\alpha} , \qquad \alpha = 1, \cdots, n - 1 . \tag{3.15}$$

A l'aide de l'égalité

$$X_\beta(N_\alpha) - X_\alpha(N_\beta) = (\nabla_{X_\beta}X_\alpha - \nabla_{X_\alpha}X_\beta)(N) ,$$

on voit que la formule (3.15) implique

$$X_\alpha(\Gamma^n_{n\beta}) - X_\beta(\Gamma^n_{n\alpha}) = (\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha})\Gamma^n_{n\gamma} . \tag{3.16}$$

En tenant compte de (3.15), il résulte que $dN$ est colinéaire avec $\omega^n$ si et seulement si $\Gamma^n_{n\alpha} = 0$, c'est-à-dire, si et seulement si $X_n$ est un champ géodésique.

Let formules $\|\text{grad } H\| = |H_n|$ et (3.10) nous montrent que $X_n$ est un champ géodésique si et seulement si les fonctions $H$ et $\|\text{grad } H\|$ ont les mêmes hypersurfaces de niveau; on a alors

$$\omega^n_\alpha = \Gamma^n\omega^\alpha \tag{3.17}$$

et, en tenant compte de (3.1d) et (3.1a), nous avons

$$[d\Gamma^n - (\Gamma^n)^2\omega^n - N\omega^n] \wedge \omega^\alpha = 0 ,$$

d'où

$$X_n(\Gamma^n) = (\Gamma^n)^2 + N . \tag{3.18}$$

Si $X_n$ est géodésique et $H =$ const., la formule (3.18) imqplique $N = 0$.

Si $N =$ const., alors $X_n$ est un champ géodésique, donc $\|\text{grad } H\|$ et $H$ ont les mêmes hypersurfaces de niveau. Alors il $y$ a une fonction $V \in C^\infty$, [1], de sorte que

$$X_n = \frac{1}{\|\text{grad } H\|} \text{grad } H = \text{grad } V ,$$

ou $\omega^n = dV$, et la formule (3.18) nous donne

$$\frac{d\Gamma^n}{(\Gamma^n)^2 + N} = dV . \tag{3.19}$$

Pour $N = 0$, en tenant compte de (3.19), nous obtenons

$$H = \frac{1}{(k_1)^2(V + k)^2} > 0 , \qquad k, k_1 = \text{const.} ,$$

## 4. Propriétés des espaces $QC$

I. On sait [7] qu'un espace de Riemann pour lequel il existe (sur un voisinage de chaque point) une base de champs de vecteurs telle que les composantes $R_{ijkl}$ à trois et à quatre indices soient nulles, a les classes caractéristiques Pontriaguine nulles. Donc, en tenant compte de Théorème 1.1, il résulte

**Théorème 4.1.** *Un espace $QC$ a les classes caractéristiques Pontriaguine nulles.*

Comme la classe d'Euler d'une variété de dimension $n = 2k$ est donnée de

$$e(M) = \frac{(-1)^k}{(2\pi)^k k!} \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \Omega^{\sigma(2)}_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \Omega^{\sigma(2k)}_{\sigma(2k-1)} ,$$

où

$$\Omega^h_j = \tfrac{1}{2} R^h_{jlr} \omega^l \wedge \omega^r ,$$

il en résulte que dans le cas d'un espace $QC$ nous avons

$$\Omega^\alpha_\beta = H\omega^\alpha \wedge \omega^\beta , \qquad \Omega^n_\beta = N\omega^n \wedge \omega^\beta ,$$

donc

$$e(M) = \frac{(-1)^k}{(2\pi)^k k!} H^{k-1} N \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \omega^{\sigma(2)} \wedge \omega^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \omega^{\sigma(2k)} \wedge \omega^{\sigma(2k-1)} ,$$

d'où

$$e(M) = \frac{(2k)! H^{k-1} N}{(2\pi)^k k!} \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{2k} .$$

On sait, aussi, que la valeur de la classe d'Euler sur la classe fondamentale d'homologie est égale à la caractéristique d'Euler $\chi(M)$ de la variété. Évidemment que la première partie de l'hypothèse (1.17) implique $\chi(M) = 0$.

II. Pour un espace $QC$ les composantes du tenseur dérivé de courbure sont données par les formules

$$(\nabla_{X_\nu} R)_{\beta\alpha n\beta} = (H - N)\Gamma^n \delta_{\nu\alpha} ,$$

$$(\nabla_{X_n}R)_{\beta\alpha n\beta} = (H - N)\Gamma^n_{n\alpha} ,$$
$$(\nabla_{X_v}R)_{ijkt} = X_v(R_{ijkt}) , \qquad \text{dans le cas complémentaire .}$$

Parce que $H =$ const. implique $\Gamma^n = 0$, il en résulte

**Théorème 4.2.** *Soit $M$ un espace QC. Alors l'espace $M$ est local symétrique si et seulement si $H =$ const. et $N =$ const.*

III. Soit $p \in M$; alors, la condition $R(X, Y)Z = 0$, pour tous $Y, Z \in M_p$, implique

$$X^n N = 0 , \qquad X^\alpha H = 0 .$$

Il en résulte que si $N \neq 0$, $H \neq 0$, alors, pour chaque point $p \in M$, l'index de nullité est égale à zéro [6].

En tenant compte que

$$R(X_\alpha, X_n)X_n = NX_\alpha , \qquad R(X_\alpha, X_\beta)Y = H(Y^\beta X_\alpha - Y^\alpha X_\beta) ,$$

il en résulte que l'espace considéré n'a pas de distributions invariantes par toutes les transformations $R(X; Y)$.

En vertu d'un théorème de Tanno [6], nous obtenons

**Théorème 4.3.** *Si $M$ est un espace QC et $N \neq 0$, $H \neq 0$, alors $M$ est un espace irréductible.*

## 5. Champs Jacobi

Soit $(M, \langle\ \rangle)$ un espace de Riemann, $p, q \in M$, et $\Omega$ l'ensemble des chemins différentiables par morceaux qui lient les points $p$ et $q$.

Rappelons que la fonction "énergie" $E$ est égale à $E_0^1$, où

$$E_a^b(\omega) = \int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 dt , \quad \omega \in \Omega , \quad 0 \leq a < b \leq 1 .$$

Soit $\gamma$ une géodésique et

$$E_{**} \colon T\Omega_\gamma \times T\Omega_\gamma \to R$$

la forme de Hesse de la fonction $E$. On sait [4] que

$$E_{**}(W_1, W_2) = -2 \sum_t \left\langle W_2(t), \Delta_t \frac{\nabla W_1}{dt} \right\rangle$$
$$-2 \int_0^1 \left\langle W_2, \frac{\nabla^2 W_1}{dt^2} - R(\dot\gamma, W_1)\dot\gamma \right\rangle dt ,$$

où $\dot\gamma$ est le champ de vecteurs tangents au chemin $\gamma$, et $\Delta_t$ est le saut en $t$.

Aussi, on sait que l'index de $E_{**}$ est égal à la plus grande dimension d'un sous-espace de $T\Omega_\gamma$ pour lequel $E_{**}$ est négatif défini.

En utilisant l'idée de la démonstration d'un théorème de Myers [4], nous allons établir

**Théorème 5.1.** *Supposons que $M$ est un espace QC de sorte que le champ $X_n$ est géodésique. Soit $\gamma$ un chemin intégral de $X_n$ et $p = \gamma(0)$, $q = \gamma(1)$. S'il y a $r > 0$ ainsi que*

$$l = L_0^1(\gamma) > \pi r\,, \quad N(t) > r^{-2}\,, \quad \forall t \in [0, 1]\,,$$

*et, de plus, $\gamma(t)$ n'est pas conjugué à $p$ pour $t \in (0, 1)$, alors:*

(i) *$p$ et $q$ sont conjugués le long de $\gamma$,*

(ii) *index $(p; q) = n - 1$.*

*Évidemment, $L_0^1(\gamma)$ désigne la longueur de l'arc* [0, 1].

*Preuve.* Soit $\{P_i\}_{i=1,\cdots,n}$ une base orthonormée de champs de vecteurs parallèles le long de $\gamma$ ainsi que $\dot\gamma = lX_n$, où $P_n = X_n$.

Soit

$$W_\alpha(t) = (\sin \pi t)P_\alpha(t)\,, \qquad \alpha = 1, \cdots, n-1\,.$$

Alors

$$\begin{aligned} E_{**}(W_\alpha, W_\alpha) &= -2\int_0^1 \left\langle W_\alpha, \frac{\nabla^2 W_\alpha}{dt^2} + R(W_\alpha, \dot\gamma)\dot\gamma \right\rangle dt \\ &= -2\int_0^1 (\sin \pi t)^2 \left[\pi^2 - l^2 R(P_\alpha, X_n, X_n, P_\alpha)\right] dt\,. \end{aligned}$$

Les conditions du théorème impliquent

$$E_{**}(W_\alpha, W_\alpha) < 0\,, \qquad \alpha = 1, \cdots, n-1\,,$$

et, comme

$$E_{**}(W_\alpha, W_\beta) = 0\,, \qquad \alpha \neq \beta\,,$$

on en déduit immédiatement l'affirmation du théorème.

**Corollaire 5.1.** *La dimension de l'espace des champs Jacobi qui s'annullent dans $p$ et $q$ est $(n - 1)$; donc, cette dimension est maxime.*

## 6. Commentaires

Une première question qui se pose est celle de déterminer la métrique d'un espace $QC$, du moins pour certains cas particuliers, en utilisant le fait que les hypersurfaces de niveau de la fonction $H$ sont des espaces à courbure constante $H + (\Gamma^n)^2$.

On peut, aussi, rénoncer à la première partie de la condition (1.17), en supposant que le champ distingué $X$ a des zéros, ce qui complique la situation. Par exemple, nous ne savons pas si les classes caractéristiques Pontriaguine restent nulles.

Il faut mentionner encore la possibilité de considérer des situations plus générales dans lesquelles sont satisfaites seulement une partie de conditions (1.5), (1.7), (1.9), et (1.12), $\cdots$, (1.15). Ainsi, l'existence d'une fonction type-verseur ombilicale, [1], assure la réalisation de la condition (1.7). Par une fonction type-verseur on comprend une fonction régulière $f \in F(M)$ de sorte que les fonctions $f$ et $\|\operatorname{grad} f\|$ aient les mêmes hypersurfaces de niveau. Une application intéressante de ces fonctions je trouve en ce qui concerne les changements conformes nonhomothétiques de métrique qui conservent le tenseur de courbure [2], ou dans l'étude des espaces de Riemann à courbures planes de même signe [5].

## Bibliographie


[1] V. Boju, *Une méthode d'utiliser l'opérateur gradient, en géométrie riemannienne,* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **9** (1978) 1297–1299.

[2] V. Boju & M. Popescu, *Changements conformes de métrique du point de vue global,* Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **57** (1974) 346–349.

[3] S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces,* Academic Press, New York, 1962.

[4] J. Milnor, *Morse theory,* Annals of Math. Studies, No. 51, Princeton University Press, Princeton, 1963.

[5] M. Popescu & V. Boju, *Sur un théorème Vranceanu concernant les courbures planes,* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **10** (1976) 1399–1401.

[6] S. Tanno, *Riemannian manifolds of nullity index zero and curvature tensor-preserving transformations,* J. Math. Soc. Japan (26) **2** (1974) 258–271.

[7] Gh. Vranceanu, *Leçons de géométrie différentielle,* Vol. 4, Acad. République Populaire Roumaine, Bucarest, 1975.


UNIVERSITÉ DE CRAIOVA, ROUMANIE